LIBRIS | We know books

Kit Yates

Matematica vieții și a morții

7 principii matematice care ne conturează viața

Traducere din limba engleză de
ALEXANDRU BUMBAȘ

LITERA
București

LIBRIS | We know books

Cuprins

Introducere: Aproape totul 9

1. Gândire exponențială
   Explorarea minunatei puteri și a limitelor obiective ale comportamentului exponențial 17

2. Sensibilitate, specificitate și „a doua părere"
   De ce matematica face medicina să fie importantă 53

3. Legile matematicii
   Investigarea rolului matematicii în aplicarea legii 96

4. Să nu crezi în adevăr
   Demistificarea statisticilor media 134

5. La locul nepotrivit, la momentul nepotrivit
   Evoluția sistemelor numerice și modul în care cifrele ne dezamăgesc 174

6. Neobosita optimizare
   Potențialul nelimitat al algoritmilor – de la evoluție la comerțul online 206

7. Predispus, contagios, vindecat
   Combaterea bolilor este în mâinile noastre 242

Epilog: Emancipare matematică 279

Mulțumiri 283

LIBRIS We know books

găsirea răspunsurilor la întrebările fundamentale despre misterele cosmosului și ale propriei specii. Matematica ne poartă pe nenumăratele căi ale vieții și așteaptă, dincolo de vălul de ignoranță, să ne privească în ochi când ne dăm duhul.

Capitolul 1
GÂNDIRE EXPONENȚIALĂ

EXPLORAREA MINUNATEI PUTERI ȘI A LIMITELOR OBIECTIVE ALE COMPORTAMENTULUI EXPONENȚIAL

Darren Caddick este instructor auto în Caldicot, un mic orășel din South Wales. În 2009, un prieten i-a propus o afacere profitabilă. Printr-o contribuție de 3 000 de lire sterline într-un fond de investiții local și recrutarea altor doi oameni care să procedeze la fel, Darren avea să obțină un profit de 23 000 de lire, în doar câteva săptămâni. Inițial, gândindu-se că era prea frumos să fie adevărat, Caddick rezistase tentației. Totuși prietenii săi l-au convins că „nimeni nu are nimic de pierdut, pentru că schema financiară va funcționa la nesfârșit", așa că a decis să își încerce norocul. A pierdut totul și, zece ani mai târziu, încă mai resimte consecințele.

Fără să vrea, Caddick s-a trezit la baza unei scheme piramidale, care nu avea cum să „funcționeze la nesfârșit". Inițiată în 2008, escrocheria „Give and Take" avea să rămână fără investitori și să intre în colaps în mai puțin de un an, dar nu înainte de a absorbi 21 de milioane de lire sterline de la peste 10 000 de investitori din Regatul Unit, 90% dintre aceștia pierzând cele 3 000 de lire inițiale. Schemele de investiții care se bazează pe recrutarea (de către investitori) a unor noi membri pentru a-și amortiza investiția sunt sortite eșecului. Numărul noilor investitori de care este nevoie la fiecare nivel crește proporțional cu numărul de participanți din schemă. După 15 runde de recrutare, schema piramidală atinge peste 10 000 de membri. Deși pare un număr mare, în „Give and Take" acest nivel a fost atins rapid.

LIBRIS | We know books

După încă 15 runde însă, ar fi trebuit ca unul din șapte oameni de pe întreaga planetă să investească pentru ca schema să poată continua. Acest fenomen de creștere rapidă, care a dus la inevitabila lipsă de noi membri și la colapsul piramidei, poartă denumirea de creștere exponențială.

CA MUSCA-N LAPTE

Ceva crește exponențial când crește proporțional cu mărimea actuală. Imaginează-ți că deschizi o sticlă de lapte dimineața și o singură celulă de bacterie *Streptococus faecalis* își face drum în sticlă, înainte să pui capacul la loc. *Strep. f.* este una dintre bacteriile responsabile de acrirea și brânzirea laptelui, însă o singură celulă nu ar trebui să conteze prea mult, nu-i așa?[4] Poate devine mai îngrijorător după ce afli că, în lapte, celulele de *Strep. f.* se divid și produc două celule-fiice pe oră.[5] Cu fiecare generație, numărul de celule crește proporțional cu numărul actual de celule, prin urmare numărul lor crește exponențial.

Diagrama care arată cum crește exponențial o cantitate seamănă oarecum cu o rampă înaltă folosită de skateri și bicicliști pentru acrobații. Inițial, înclinarea rampei este foarte scăzută – curba are o pantă ușoară și se înalță gradual (vezi Figura 2). După două ore, în sticla cu lapte se vor afla patru celule *Strep. f.*, iar după patru ore – 16 celule, ceea ce nu pare foarte problematic. La fel ca în cazul rampei, înălțimea și panta curbei exponențiale

[4] Botina, S.G., Lysenko, A.M., & Sukhodolets, V.V. (2005), „Elucidarea stării taxonomice a tulpinilor industriale ale bacteriilor de acid lactic termofil prin secvențierea genelor de tip 165rRNA", *Microbiology*, 74(4), pp. 448–452. https://doi.org/10.1007/s11021-005-0087-7

[5] Cárdenas, A.M., Andreacchio, K.A., & Edelstein, P.H. (2014), „Prevalența și detecția populațiilor mixte de bacterii enterococice", *Journal of Clinical Microbiology*, 52(7), pp. 2604–2608. https://doi.org/10.1128/JCM.00802-14
Lam, M.M.C., Seemann, T., Tobias, N.J., Chen, H., Haring, V., Moore, R.J. Stinear, T.P. (2013), „Analiza comparativă a genomului complet al unei epidemii intraspitalicești cu o secvență de tip 203 a unei clone a *enterococcus faecium* rezistentă la vancomicină", *BMC Genomics*, 14, p. 595. https://doi.org/10.1186/1471-2164-14-595

cresc însă rapid. Cantitățile care cresc exponențial par a avea o rată lentă de creștere la început, dar pot evolua foarte rapid, într-un fel care pare neașteptat. Dacă lași laptele afară 48 de ore, iar creșterea exponențială a numărului de celule *Strep. f.* continuă, când îl vei turna din nou peste cereale, ar putea fi aproape o mie de trilioane de celule în sticlă – suficient cât să îți închege sângele, darămite laptele. În acel moment, numărul de celule l-ar depăși pe cel al tuturor oamenilor de pe planetă într-un raport de 40 000 la 1. Curbele exponențiale sunt numite uneori curbe „de tip J", pentru că seamănă cu litera J. Desigur, pe măsură ce bacteria folosește nutrienții din lapte și îi schimbă pH-ul, condițiile de dezvoltare se deteriorează, iar creșterea exponențială nu este susținută decât pentru o perioadă relativ scurtă. Evident, în aproape toate situațiile din viața reală, creșterea exponențială pe termen lung nu poate fi susținută și, de multe ori, este patologică, pentru că subiectul dezvoltării folosește resursele în mod neviabil. Creșterea exponențială susținută a celulelor din corp, de exemplu, este emblema tipică a cancerului.

Un alt exemplu de curbă exponențială este toboganul de apă cu cădere liberă, denumit astfel tocmai pentru că panta este atât de abruptă încât să ai senzația unei căderi libere. În acest caz,

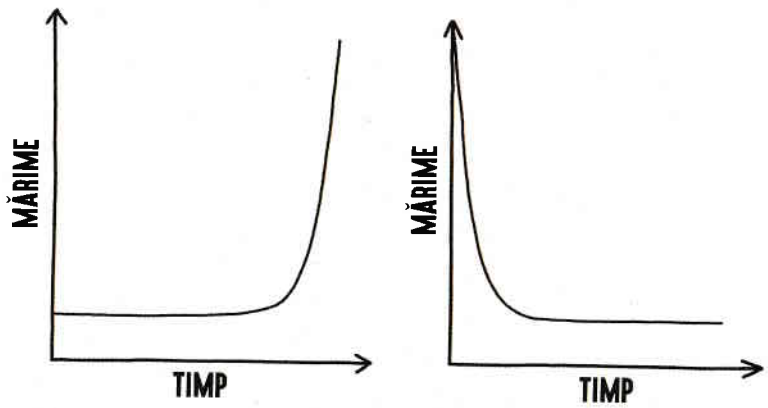


Figura 2: Curbă de creștere exponențială de tip J (stânga) *și curbă de descreștere* (dreapta).

LIBRIS We know books

pe măsură ce înaintăm de-a lungul pantei, navigăm pe o curbă exponențială de *descreștere*, spre deosebire de cea de *creștere* (vezi a doua imagine din Figura 2). Descreșterea exponențială are loc când cantitatea *scade* proporțional cu dimensiunea actuală. Imaginează-ți că deschizi o pungă imensă de bomboane M&M pe care le împrăștii pe masă și din care le consumi doar pe cele care au căzut cu fața M în sus. Pui restul de bomboane înapoi în pungă, pentru a doua zi. A doua zi, agiți punga bine și împrăștii bomboanele pe masă. Consumi din nou doar bomboanele care au căzut cu fața M în sus și le pui pe restul în pungă. Ori de câte ori scoți bomboanele din pungă, consumi aproximativ jumătate din bomboanele rămase, indiferent de numărul cu care începi. Numărul de bomboane descrește proporțional cu numărul rămas în pungă, ceea ce duce la scăderea exponențială a numărului de bomboane. La fel, toboganul de apă exponențial începe de sus, aproape vertical, astfel că înălțimea la care se află persoana în cădere descrește foarte rapid; când avem multe bomboane, numărul de bomboane pe care trebuie să le consumăm este și el foarte mare. Cu toate acestea, curba graduală devine din ce în ce mai puțin abruptă până ajunge aproape orizontală la sfârșitul pantei; cu cât avem mai puține bomboane rămase în pungă, cu atât mai puțin vom mânca zilnic. Deși căderea bomboanelor cu fața în sus sau în jos este aleatorie și imprevizibilă, curba predictivă a pantei scăderii exponențiale se reflectă în numărul de bomboane care ne-a mai rămas.

În acest capitol vom descoperi legăturile ascunse dintre comportamentul exponențial și fenomenele din viața de zi cu zi: răspândirea unei epidemii sau a unei meme care circulă pe internet; dezvoltarea rapidă a unui embrion sau procesul mult prea lent de creștere a depozitelor bancare; modul în care percepem timpul sau chiar explozia unei bombe nucleare. Pe măsură ce vom avansa în explicații, vom înțelege mult mai clar de ce nu a funcționat schema piramidală. Poveștile oamenilor care și-au pierdut banii într-o astfel de escrocherie ne ajută să înțelegem cât este de important să gândim exponențial, pentru a putea anticipa schimbările surprinzătoare din lumea modernă.

O PROBLEMĂ DE LARG INTERES

În rarele ocazii în care reușesc să depun bani în contul meu bancar, mă mulțumesc cu gândul că, oricât de puțini bani aș avea în cont, suma crește întotdeauna exponențial. Într-adevăr, contul bancar este locul în care nu există limite în ceea ce privește creșterea exponențială, cel puțin în teorie. Dacă avem o dobândă capitalizată (dobânda calculată la suma inițială, la care se adaugă o dobândă la dobândă), atunci suma totală din cont crește proporțional cu mărimea contului – emblema creșterii exponențiale. Benjamin Franklin spunea: „Banii aduc bani, iar banii pe care îi fac banii aduc și mai mulți bani". Dacă ai suficientă răbdare, chiar și cea mai mică investiție poate deveni o avere. Dar nu te grăbi să-ți blochezi într-un cont banii pentru zile negre. Dacă ai investit 100 de lire cu o dobândă de 1% pe an, ți-ar trebui circa 900 de ani să devii milionar. Deși creșterea exponențială este deseori asociată cu creșterile rapide, dacă rata de creștere și investiția inițială sunt mici, atunci creșterea exponențială este percepută ca fiind într-adevăr foarte lentă.

Reversul medaliei constă în faptul că, dacă ai o rată fixă a dobânzii pe suma restantă (deseori la o rată ridicată), datoriile de pe cardul de credit cresc și ele exponențial. Așa cum se întâmplă și în cazul ipotecilor, cu cât îți achiți mai repede cardurile de credit, cu atât mai puțin vei plăti la final, întrucât creșterea exponențială nu are ocazia să-și arate efectele.

*

Plata ipotecilor și a altor datorii a fost motivul principal care le-a împins pe victime să participe la schema piramidală „Give and Take". Tentația câștigurilor rapide și nevoia de a reduce presiunea financiară erau greu de combătut, în ciuda semnalelor că ceva nu era în regulă. Așa cum recunoaște și Caddick, „zicala potrivit căreia «dacă ceva pare mult prea bun ca să fie adevărat, atunci cu siguranță așa este» e foarte, foarte adevărată aici".

Inițiatoarele acestei escrocherii, pensionarele Laura Fox și Carol Chalmers, erau prietene încă din perioada în care studiaseră împreună la o școală catolică. Cele două prietene (stâlpi ai

LIBRIS We know books

comunității în care trăiau – una era vicepreședinta clubului local Rotary, iar cealaltă era o bunică foarte respectată) știau exact care avea să fie evoluția schemei pe care o inventaseră. „Give and Take" a fost pusă în practică cu multă măiestrie, pentru a-i ademeni pe potențialii investitori, ascunzându-le în același timp capcanele. Spre deosebire de schemele piramidale tradiționale (pe două niveluri), în cadrul cărora persoana situată în vârf ia bani direct de la investitorii recrutați, „Give and Take" funcționa ca o operațiune de tip „avion", pe patru niveluri. În acest tip de schemă, persoana aflată în vârful lanțului poartă denumirea de „pilot". Pilotul recrutează „doi copiloți", care, la rândul lor, recrutează câte „doi membri de echipaj", și care, la rândul lor, recrutează fiecare câte „doi pasageri". În cazul escrocheriei orchestrate de Fox și Chalmers, odată ce ierarhia de 15 persoane era completă, cei opt pasageri plăteau fiecare câte 3 000 de lire, iar investitorul inițial câștiga 23 000 de lire, adică mai puțin cu 1 000 de lire decât suma totală. O parte din acești bani era donată unor organizații caritabile, împreună cu scrisori de mulțumire, de genul celor venite din partea Societății Naționale pentru Prevenirea Violenței Împotriva Copiilor, care dădeau o notă de legitimitate întregului proces. Restul era păstrat de organizatori, pentru a asigura continuitatea operațiunii.

După ce își primește plata, pilotul părăsește schema, iar cei doi copiloți devin piloți, așteptând recrutarea altor opt pasageri la baza piramidelor. Schemele de tip avion sunt foarte seducătoare pentru investitori, căci noii participanți nu trebuie decât să recruteze alți doi oameni pentru a-și multiplica investiția de 8 ori (deși, desigur, aceștia doi trebuie să recruteze alți doi și așa mai departe). Alte scheme de acest tip funcționează pe baza unui efort mai pronunțat de recrutare a altor indivizi, pentru obținerea acelorași tipuri de profit. Structura pe patru niveluri „Give and Take" însemna că membrii echipajului nu luau niciodată bani direct de la pasagerii recrutați de ei personal. Întrucât noii recruți sunt, de cele mai multe ori, prieteni și rude ale membrilor echipajului, asta face banii să nu circule direct între cunoștințe apropiate. Această separare a pasagerilor de piloți, ale căror profituri le finanțează, facilitează procesul de recrutare și minimalizează

probabilitatea represaliilor, creând o oportunitate de investiție mult mai atractivă și permițând astfel recrutarea mai ușoară a mii de investitori în schemă.

În același fel, multor investitori în piramida „Give and Take" li se crea încrederea de a investi prin poveștile de succes ale celor dinaintea lor – în anumite cazuri, chiar asistând la plata profitului acestora. Organizatoarele schemei „Give and Take", Fox și Chalmers, țineau petreceri private extravagante la hotelul Somerset, deținut de familia Chalmers. În timpul acestor petreceri erau distribuite pliante cu fotografii ale membrilor schemei, întinși pe paturi acoperite cu bani sau cu teancuri de bancnote de 50 de lire în mână. Organizatoarele invitau la toate aceste petreceri și „miresele" schemei – acei oameni (în special femei) care ajunseseră în poziția de pilot al celulei piramidale și care urmau să își încaseze plățile. Acestor „mirese" li se puneau patru întrebări simple, de tipul „Care este organul care crește când Pinocchio minte?", în fața unui public de 200–300 de potențiali investitori.

Aceste „întrebări" aveau scopul de a exploata o portiță în lege, despre care Fox și Chalmers credeau că permitea astfel de investiții, dacă era implicat și un element de „aptitudini". Într-o înregistrare video făcută cu telefonul mobil, Fox poate fi auzită strigând: „Jucăm în casele noastre și de-asta e totul legal." Fox se înșela. Miles Bennet, procurorul care a instrumentat cazul, explică: „Chestionarul era atât de simplu încât nu aveau cum să nu existe participanți în poziția de câștigători care să nu își primească banii. Aceștia puteau chiar să le ceară prietenilor sau altor membri din comitet să îi ajute cu răspunsurile la întrebări, iar comitetul știa deja care erau răspunsurile!"

Acest lucru nu le-a împiedicat pe Fox și pe Chalmers să se folosească de aceste petreceri cu premii pentru a-și atrage investitorii în campania lor primitivă de marketing viral. După ce vedeau miresele încasându-și cecurile de 23 000 de lire, foarte mulți dintre invitați investeau și își încurajau prietenii și familia să procedeze la fel, formând astfel propriile piramide. Pornind de la principiul că fiecare nou investitor atrăgea alți doi (sau mai mulți) investitori, schema ar fi continuat la nesfârșit. În 2008, când Fox și Chalmers au început schema, nu existau decât cei doi piloți.

LIBRIS We know books

Recrutând câțiva prieteni care să investească și să le ajute să organizeze schema, cele două au adus rapid încă patru oameni „la bord". Cei patru au recrutat alți opt, apoi 16 și așa mai departe. Această dublare exponențială a numărului de noi recruți seamănă foarte mult cu dublarea numărului de celule dintr-un embrion în curs de dezvoltare.

EMBRIONUL EXPONENȚIAL

Când soția mea era însărcinată cu primul nostru copil, eram obsedați amândoi, ca orice părinte în devenire, să înțelegem ce se întâmpla în burta ei. Am împrumutat un monitor cardiac cu ultrasunete, prin intermediul căruia ascultam bătăile inimii bebelușului. Ne-am înscris la studii clinice pentru a obține scanări suplimentare și am consultat nenumărate site-uri care descriau procesul de dezvoltare al fiicei noastre, încercând să înțelegem de ce soției mele îi era zilnic rău. Printre site-urile „favorite" se numărau cele de tipul „Cât de mare e bebelușul tău?", care compară, pentru fiecare săptămână de gestație, dimensiunile fetusului cu diverse fructe sau legume ori cu alte alimente de dimensiuni potrivite. Pe aceste site-uri, viitorii părinți pot citi informații de tipul „Cântărind până în 50 de grame și având circa 7 centimetri, îngerașul tău este cam cât o lămâie" sau „micuța ta gulie cântărește acum 150 de grame și abia dacă are 12 centimetri din cap până-n picioare".

Ceea ce m-a uimit în legătură cu aceste comparații a fost rapiditatea cu care se modificau dimensiunile de la o săptămână la alta. În a patra săptămână de sarcină, fetusul are dimensiunea unei semințe de mac, dar până în săptămâna a cincea atinge deja dimensiunea unei semințe de susan! Asta înseamnă o creștere de 16 ori în volum, în cursul unei singure săptămâni.

Totuși poate că nu ar trebui ca această creștere rapidă în dimensiuni să fie surprinzătoare. Când ovulul este fertilizat de spermatozoid, zigotul rezultat este supus unor etape de diviziune celulară secvențială, care poartă denumirea de „segmentare", care permite creșterea rapidă a numărului de celule embrionare. La început, se divide în două. Opt ore mai târziu,

aceste două noi celule se scindează în patru, după alte opt ore, în opt celule, apoi în 16 și așa mai departe – la fel ca numărul de investitori de la fiecare nivel al schemei piramidale. Diviziunile respective apar aproape sincronizat la fiecare opt ore. Astfel, numărul de celule crește în raport cu cantitatea de celule din embrion la un anumit moment: cu cât există mai multe celule, cu atât mai multe celule noi sunt create în respectiva diviziune celulară. În acest caz, întrucât fiecare celulă generează exact o celulă-fiică la fiecare rundă de segmentare, factorul cu care numărul de celule crește este egal cu 2; cu alte cuvinte, dimensiunea embrionului se dublează la fiecare generație.

În timpul gestației umane, perioada în care embrionul se dezvoltă exponențial este una de scurtă durată, din fericire. Dacă embrionul ar continua să se dezvolte la aceeași rată exponențială pe toată durata sarcinii, cele 840 de divizări celulare sincronizate ar duce la nașterea unui superbebeluș, alcătuit din 10^{253} de celule. Pentru a contextualiza acest calcul, dacă fiecare atom din univers ar fi o copie a universului nostru, atunci numărul total de atomi din toate aceste universuri ar fi echivalent cu numărul de celule al superbebelușului. În mod natural, diviziunea celulară încetinește pe măsură ce fenomenele complexe din viața embrionară încep să se contureze. În realitate, numărul de celule dintr-un nou-născut poate fi aproximat la circa 2 miliarde. La acest număr de celule se ajunge în urma a mai puțin de 41 de runde de segmentare sincronizată.

DISTRUGĂTORUL LUMILOR

Creșterea exponențială este vitală pentru expansiunea rapidă a numărului de celule necesar în crearea unei noi vieți. Pe de altă parte însă, forța uluitoare și înfricoșătoare a creșterii exponențiale l-a făcut pe fizicianul nuclear J. Robert Oppenheimer să afirme: „Acum am devenit însăși Moartea, distrugătorul lumilor". El nu se referea la dezvoltarea celulelor, nici măcar la organismele individuale, ci la energia generată de ruperea nucleului atomic.

LIBRIS We know books

În timpul celui de-al Doilea Război Mondial, Oppenheimer a fost directorul laboratorului Los Alamos, unde își avea baza Proiectul Manhattan care se ocupa de construirea bombei atomice. Ruperea nucleului (protoni și neutroni strâns legați între ei) unui atom greu în fragmente mai mici a fost descoperită de chimiștii germani, în 1938. Acest proces a fost denumit „fisiune nucleară", în analogie cu fisiunea binară (sau scindarea) unei celule vii în două celule mai mici, așa cum se întâmplă în cazul embrionilor. S-a descoperit că fisiunea este atât un proces natural – care are loc în cazul dezintegrării radioactive a izotopilor instabili –, cât și un proces care poate fi provocat în mod artificial, prin bombardarea nucleului unui atom cu particule subatomice, în așa-numita „reacție nucleară". În ambele cazuri, scindarea nucleului în două nuclee mai mici, sau produși ai fisiunii, era însoțită de eliberarea unei mari cantități de energie sub forma radiației electromagnetice, dar și de energia asociată mișcării produșilor de fisiune. Oamenii de știință aveau să descopere foarte repede că acești produși de fisiune aflați în mișcare, apăruți în urma unei reacții nucleare inițiale, puteau fi utilizați pentru a bombarda alte nuclee, rupând și mai mulți atomi și eliberând astfel cantități și mai mari de energie, într-o așa-numită „reacție nucleară în lanț". Dacă fiecare fisiune producea, în medie, mai mult de un produs care să poată fi utilizat în spargerea altor atomi, atunci, în teorie, fiecare fisiune putea provoca mai multe alte fisiuni. Continuând acest proces, numărul reacțiilor creștea exponențial, producând energie la o scară fără precedent. Dacă s-ar fi descoperit un material care să permită această reacție nucleară în lanț neîncetată, creșterea exponențială a energiei emise în scurtul interval de timp al reacțiilor ar fi putut permite ca un astfel de material *fisionabil* să fie folosit ca armă.

În aprilie 1939, în zorii izbucnirii celui de-al Doilea Război Mondial în Europa, fizicianul francez Frédéric Joliot-Curie (ginerele soților Pierre și Marie Curie și câștigător al Premiului Nobel împreună cu soția sa) făcea o descoperire crucială. Acesta a publicat în revista *Nature* un articol în care arăta că, în urma fisiunii cauzate de un singur neutron, atomii izotopului de uraniu U-235 emit în medie 3,5 neutroni cu energie ridicată (această valoare

avea să fie modificată ulterior la 2,5).[6] Acesta era exact materialul necesar pentru a alimenta lanțul exponențial al reacțiilor nucleare. Începea „cursa pentru bombă".

Alături de Werner Heisenberg, câștigător al Premiului Nobel, și de alți fizicieni germani recunoscuți care lucrau pentru proiectul nuclear al naziștilor, Oppenheimer știa ce avea de făcut la Los Alamos. Marea provocare era aceea de a crea condițiile care să faciliteze o reacție nucleară exponențială în lanț, permițând eliberarea aproape instantanee a imensei cantități de energie necesare unei bombe atomice. Pentru a produce această reacție în lanț autonomă și suficient de rapidă, Oppenheimer trebuia să se asigure că un număr suficient dintre neutronii emiși de fisiunea U-235 erau reabsorbiți de nucleele altor atomi U-235, provocând ruperea acestora. El a descoperit că, în uraniul natural, prea mulți neutroni emiși sunt absorbiți de atomii U-238 (celălalt izotop important, care reprezintă circa 99,3% din uraniul natural)[7], ceea ce înseamnă că orice reacție în lanț se stinge exponențial în loc să crească. Pentru a produce o reacție exponențială în lanț, Oppenheimer trebuia să obțină uraniul U-235 extrem de pur, prin înlăturarea atomilor de U-238 din minereu.

Aceste argumente au dus la ideea așa-numitei *mase critice* a materialului fisionabil. Masa critică a uraniului este cantitatea de material necesară pentru a genera o reacție nucleară în lanț autonomă. Depinde de numeroși factori, probabil cel mai important fiind puritatea U-235. Chiar și cu o concentrație de U-235 de 20% (comparativ cu concentrația naturală de 0,7%), masa critică depășește 400 de kilograme, astfel încât nivelul ridicat de puritate este esențial pentru fabricarea unei bombe fezabile. Chiar și după ce a obținut o cantitate suficientă de uraniu pur, pentru a ajunge la supercriticalitate, lui Oppenheimer i-a rămas provocarea de a fabrica bomba ca atare. În mod evident, nu putea împacheta o masă critică de uraniu într-o bombă sperând că nu va exploda.

[6] Von Halban, H., Joliot, F., & Kowarski, L. (1939), „Numărul de neutroni eliberați în timpul procesului de fisiune nucleară a uraniului", *Nature*, 143(3625), p. 680. https://doi.org/10.1038/143680a0

[7] Webb, J. (2003), „Se modifică legile naturii în timp?", *Physics World*, 16(4), pp. 33–38. https://doi.org/10.1088/2058-7058/16/4/38